МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 519.8 DOI 10.12737/16075

Моделирование трехмерных полей упругих деформаций с помощью метода точечных источников*

С. Ю. Князев[1], В. Н. Пустовойт[2], Е. Е. Щербакова[3], А. А. Щербаков[4]**
[1,2,3]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[4]Новочеркасский электровозостроительный завод (НЭВЗ), г. Новочеркасск, Российская Федерация

Modeling of three-dimensional elastic strain fields by point-source method***

S. Yu. Knyazev[1], V. N. Pustovoyt[2], E. E. Shcherbakova[3], A. A. Shcherbakov[4]**
[1,2,3]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[4]Novocherkassk Electric Locomotive Plant (NEVZ), Novocherkassk, Russian Federation

Целью работы является исследование возможности и эффективности трехмерных численных моделей полей упругих напряжений в деформированных твердых телах. При построении моделей используется метод точечных источников поля (МТИ), называемый в зарубежной литературе методом фундаментальных решений. Описывается построение системы МТИ при моделировании полей различной физической природы. Вводится понятие точечного источника поля упругих смещений в деформированном твердом теле. Результатом работы является построение МТИ системы, которую можно использовать для решения трехмерных задач теории упругости — например, для решения классических первой и второй граничных задач теории упругости (когда на границе заданы либо напряжения, либо смещения), а также смешанной граничной задачи (когда на одной части границы заданы смещения, а на другой — напряжения). Исследуются свойства МТИ при решении стандартной задачи, задачи Дирихле для круговой области. Найдены зависимости погрешности численного решения от параметров задачи — в частности, таких, как число зарядов, моделирующих искомое поле, удаленность зарядов от границ области решения. Решается тестовая задача расчета поля деформаций в шаровой области. На основании полученных результатов делается следующий вывод. При численном решении трехмерных задач теории упругости наблюдается убывающая экспоненциальная зависимость погрешности МТИ от квадратного корня из числа моделирующих зарядов. Это свойство позволяет получить численное решение с весьма низкой относительной погрешностью, что свидетельствует о перспективности использования МТИ при численном решении задач теории упругости, в том числе и при решении трехмерных задач.

Ключевые слова: метод точечных источников, метод фундаментальных решений, задача теории упругости, задача Дирихле.

The work objective is to investigate the possibility and efficiency of three-dimensional numerical models of the elastic stress fields in the deformed solids. The field point-source method (PSM) designated as the method of fundamental solutions (MFS) in the foreign literature is used to develop these models. The PSM system generation for modeling fields of different physical nature is described. The concept of a point source of the elastic displacement field in the deformed solid is introduced. The research result is a developed PSM equations system that can be applied for solving three-dimensional problems in the elasticity theory, including the classical first and second boundary value problems in the elasticity theory (when either the voltage or bias is set on the boundary), as well as a mixed boundary problem (when on one part of the boundary, the displacement is set, and on the other — the voltage). The PSM properties are studied when solving standard problems, and the Dirichlet problem for a circular domain. The dependences of the numerical solution error on the problem parameters, in particular, on such as the charge number simulating the desired field, the remoteness of the charges from the solution domain boundaries, are obtained. The test problem of calculating the deformation field in the ball domain is solved. Upon the results obtained, the following conclusion is made. In the numerical solution of three-dimensional elasticity problems, a decreasing exponential dependence of the PSM error on the square root of the simulating charge number is observed. This property provides a numerical solution with a very low relative error that implies the PSM application perspectiveness in the numerical solution of the elasticity problems, including three-dimensional problems.

Keywords: field Point-Source method, method of fundamental solutions, elasticity problem, Dirichlet problem.

Введение. Расчет полей упругих напряжений в деформированных телах является одной из важнейших задач прикладной математики [1–3]. При численном решении этих задач, в зависимости от их особенностей, применяют различные численные методы: конечных разностей (МКР) [4], граничных элементов (МГЭ) [3]. Однако чаще других использует-

* Работа выполнена по грантам РФФИ 13-07-00952-а и 14-07-00705-а.
** E-mail: ksy@donpac.ru, fipm-dstu@mail.ru, Sherbakovaee@mail.ru, AnSherbakov@mail.ru
*** The research is done on RFFI grants nos. 13-07-00952-a and 14-07-00705-a.

ся метод конечных элементов (МКЭ) [2], который по праву можно считать эталоном для численного решения краевых задач математической физики. Тем не менее в ряде случаев, в том числе при моделировании полей упругих напряжений в деформированных твердых телах, использование МКЭ не всегда эффективно — в частности, точность результата может оказаться ниже требуемой, особенно при решении трехмерных задач. Кроме того, при необходимости получать решение в режиме реального времени с применением МКЭ возможно недостаточное быстродействие вычислений. В указанных случаях возникает необходимость поиска численных методов, позволяющих получать более точное решение за более короткий промежуток времени. В качестве примера приведем метод точечных источников поля (МТИ) [5–9], который может использоваться для решения широкого круга задач математической физики. Его применение наиболее эффективно при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа: уравнений Лапласа, Гельмгольца, бигармонических уравнений [8–13]. Имеются сведения об эффективности использования этого метода при решении краевых задач для уравнений параболического типа и для волновых уравнений [8, 14]. В данной статье иллюстрируется возможность применения МТИ при моделировании полей упругих напряжений в деформированных твердых телах. В отличие от статьи [15], в данной работе исследуются возможности применения МТИ при решении трехмерных задач теории упругости. Прежде всего дадим краткое описание МТИ.

Краткое описание МТИ. Пусть в n-мерном Евклидовом пространстве задана область V, ограниченная поверхностью S. В области V определено однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\hat{L}U = 0\,, \tag{1}$$

а на граничной поверхности S задано условие

$$\hat{l}U\Big|_S = f\,, \tag{2}$$

где $\hat{L}$ и $\hat{l}$ — линейные операторы.

Пусть определена система φ_i линейно независимых решений уравнения (1). Тогда приближенно решение граничной задачи (1)–(2) можно искать в виде

$$U(r) \approx \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i(r)\,. \tag{3}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов q_i подставляем (3) в граничное условие (2) и потребуем его выполнения в N узловых точках $\mathbf{r}_j$. В результате для нахождения коэффициентов q_i получается система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} q_i \hat{l} \varphi_i(r_j) = f(r_j)\,. \tag{4}$$

В качестве системы функций φ_i можно использовать фундаментальные решения $\varphi_i = \varphi(r, R_i)$ уравнения (1), соответствующие точкам R_i, расположенным на вспомогательной замкнутой поверхности S_q, целиком охватывающей S и не имеющей с ней (и с V) общих точек. В [5] показано, что при выполнении достаточно общих условий система функций $\varphi(r, R_i)$ обладает свойствами линейной независимости и полноты и ее можно использовать для нахождения приближенного решения граничной задачи (1)–(2) в виде суммы

$$U_N(r) = \sum_{i=1}^{N} q_i\ \varphi(r, R_i)\,. \tag{5}$$

Фундаментальное решение $\varphi(r, R)$ можно рассматривать как потенциал поля, созданного в точке r единичным положительным зарядом, помещенным в точку R, а искомое решение, созданное протяженными, непрерывно распределенными зарядами, представить в виде суперпозиции полей точечных зарядов. Коэффициенты q_i в (5) при этом можно рассматривать как величины точечных зарядов, расположенных на поверхности S_q. Такое физическое истолкование решения граничной задачи способствует удачному выбору вспомогательной поверхности S_q и оптимальному расположению на ней зарядов, что существенно при численном решении. Таким образом, решение краевой задачи сводится к системе линейных уравнений (4). После решения системы (4), называемой системой МТИ, и нахождения зарядов q_i искомое приближенное решение краевой задачи вычисляется с помощью формулы (5).

В [7, 8, 12] показано, что погрешность МТИ e при решении краевых задач для уравнения Лапласа экспоненциально быстро убывает с ростом числа зарядов, моделирующих искомое поле. Например, для двумерной круговой области радиусом r_0, если заряды располагаются на вспомогательной окружности радиусом R, то

$$e \approx E\left(\frac{r_0}{R}\right)^{N/2}.$$

Здесь E — параметр, не зависящий от числа зарядов, моделирующих поле. При решении трехмерных задач наблюдается экспоненциальная зависимость погрешности МТИ от квадратного корня из числа моделирующих зарядов:

$$e \approx E\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2\sqrt{\frac{N}{\pi}}} \tag{6}$$

Моделирование упругих деформаций. Упругие деформации в изотропных телах определяются вектором деформаций $U(r)$, компоненты которого $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$ и $U_z(x,y,z)$ при отсутствии объемных сил, как известно, удовлетворяют системе трех линейных уравнений эллиптического типа [5, 16]:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta U_x=0,\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta U_y=0,\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta U_z=0, \tag{7}$$

где λ и μ — постоянные Ламе, $\theta=\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}$.

Пусть на поверхности S деформированного твердого тела V выполняются граничные условия

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{ij}U_j+\beta_{ij}\sigma_{nj}\right)=f_i. \tag{8}$$

Здесь α, β, f (с соответствующими индексами) — известные функции точки $(x,y,z)\in V$; σ_{nj} — компоненты тензора напряжений, выраженные с помощью известных соотношений [5] через производные компонент смещения; индексы i и j в зависимости от численного значения соответствуют компонентам x, y или z.

Классические первая и вторая граничные задачи теории упругости, когда на границе S заданы либо напряжения, либо смещения, являются частными случаями граничной задачи (7)–(8) при соответствующих значениях параметров α и β.

При моделировании упругих деформаций используются фундаментальные решения для каждой из трех компонент (x,y,z) вектора $U(r)$. Причем каждой компоненте соответствуют три типа фундаментальных решений и, соответственно, три типа зарядов, моделирующих поле упругих деформаций. Важнейшим параметром фундаментального решения является также координата точки, в которой располагается заряд, создающий поле упругих деформаций. При решении задач теории упругости с помощью МТИ моделирующие заряды находятся в узловых точках R_i (с координатами X_i, Y_i, Z_i; здесь i — номер заряда), расположенных на вспомогательной замкнутой поверхности S_q, целиком охватывающей S и не имеющей с ней (и с V) общих точек. Таким образом, фундаментальные решения определяются тремя параметрами: i — номер узловой точки, j — тип фундаментального решения и заряда (1, 2 или 3) и k — тип компоненты смещения (x, y или z). Каждой из этих совокупностей соответствует свой тип фундаментальных решений и, соответственно, свой тип зарядов, моделирующих поля деформаций, — заряды первого, второго и третьего типов. Например, зарядам первого типа в точке R_i соответствуют фундаментальные решения:

$$\varphi_i^{1x}(r)=n\frac{(x-X_i)^2}{|r-R_i|^3}+\frac{m}{|r-R_i|},\ \varphi_i^{1y}(r)=n\frac{(x-X_i)(y-Y_i)}{|r-R_i|^3},\ \varphi_i^{1z}(r)=n\frac{(x-X_i)(z-Z_i)}{|r-R_i|^3}; \tag{9}$$

зарядам второго типа:

$$\varphi_i^{2x}(r)=n\frac{(x-X_i)(y-Y_i)}{|r-R_i|^3},\ \varphi_i^{2y}(r)=n\frac{(y-Y_i)^2}{|r-R_i|^3}+\frac{m}{|r-R_i|},\ \varphi_i^{2z}(r)=n\frac{(y-Y_i)(z-Z_i)}{|r-R_i|^3}; \tag{10}$$

зарядам третьего типа:

$$\varphi_i^{3x}(r)=n\frac{(x-X_i)(z-Z_i)}{|r-R_i|^3},\ \varphi_i^{3y}(r)=n\frac{(y-Y_i)(z-Z_i)}{|r-R_i|^3},\ \varphi_i^{3z}(r)=n\frac{(z-Z_i)^2}{|r-R_i|^3}+\frac{m}{|r-R_i|}. \tag{11}$$

Здесь $m=(\lambda+3\mu)/(4\pi\lambda\mu(\lambda+2\mu))$, $n=(\lambda+\mu)/(4\pi\lambda\mu(\lambda+2\mu))$.

В соответствии с формулами (9–11) единичный положительный заряд поля смещений первого типа создает в точке своего нахождения бесконечно большое смещение вдоль оси x. При этом в точке, находящейся на единичном расстоянии от заряда в направлении оси x, возникает смещение единичной величины вдоль оси x. Напротив, единичный положительный заряд поля смещений второго типа создает в точке своего нахождения бесконечно большое смещение вдоль оси y. При этом в точке, находящейся на единичном расстоянии от заряда в направлении оси y, возникает смещение вдоль оси y единичной величины. Сходным свойством обладает заряд третьего типа.

Полнота системы функций (9–11) доказанная в [5], позволяет решать граничную задачу (7)–(8) с помощью МТИ. Для этого необходимо найти заряды моделирующих искомое поле упругих напряжений и деформаций путем решения системы МТИ, конкретный вид которой зависит от граничных условий решаемой задачи. Имеются сведения

о применении МТИ к решению задач теории упругости [5, 17–20]. Однако следует признать, что в настоящее время вопросы использования МТИ для моделирования упругих деформаций в твердых телах разработаны весьма слабо.

Рассмотрим первую граничную задачу теории упругости, когда на границе S заданы смещения U_x , U_y и U_z. Эта задача соответствует частному, простейшему случаю граничных условий (8), которые в этом случае принимают вид

$$U_x\big|_S = f_x\,,\ U_y\big|_S = f_y\,,\ U_z\big|_S = f_z\,. \qquad (12)$$

Возможны различные варианты построения системы МТИ. Наиболее естественно предположить, что для моделирования упругих деформаций целесообразно использовать одинаковое число N зарядов первого типа q_i^1 (которым соответствуют фундаментальные решения φ^{1x}, φ^{1y} и φ^{1z}), зарядов второго типа q_i^2 и зарядов третьего типа q_i^3. Пусть первые N зарядов — заряды первого типа, а последующие $2N$ зарядов — заряды второго и третьего типов. Учитывая это, в обозначении зарядов можно не указывать их тип, который теперь будет определяться номером заряда, а полное число зарядов будет равняться $3N$.

Положение зарядов, как отмечалось выше, соответствует точкам R_i, расположенным на вспомогательной замкнутой поверхности S_q, целиком охватывающей S и не имеющей с ней (и с V) общих точек. Количество таких точек равно $3N$. Разместим на границе S точки коллокации числом $3N$. В этих точках требуется выполнение граничных условий (12). Теперь систему МТИ (точнее, уравнение системы с номером j) можно записать по аналогии с (4) в виде

$$\sum_{i=1}^{3N} q_i \varphi_{ji} = f_j\,,$$

или более развернуто:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i^{1x}(r_j) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i \varphi_i^{2x}(r_j) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i\,\varphi_i^{3x}(r_j) = f_x(r_j) \text{ для } j \le N\,;\\
\sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i^{1y}(r_j) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i\,\varphi_i^{2y}(r_j) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i \varphi_i^{3y}(r_j) = f_y(r_j) \text{ для } N < j \le 2N\,;\\
\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i^{1z}(r_j) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i \varphi_i^{2z}(r_j) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i \varphi_i^{3z}(r_j) = f_z(r_j) \text{ для } j > 2N\,.
\end{gathered} \qquad (13)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

для $j \le N$ $\quad f_j = f_x(r_j)$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{1x}(r_j)$, если $i \le N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{2x}(r_j)$, если $2N \ge i > N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{3x}(r_j)\ \varphi_{ji} = \varphi_i^{3x}(r_j)$, если $i > 2N$;

для $2N \ge j > N$ $\quad f_j = f_y(r_j)$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{1y}(r_j)$, если $i \le N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{2y}(r_j)$, если $2N \ge i > N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{3y}(r_j)$, если $i > 2N$;

для $j > 2N$ $\quad f_j = f_z(r_j)$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{1z}(r_j)$, если $i \le N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{2z}(r_j)$, если $2N \ge i > N\ 2N \ge i > N$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{3z}(r_j)$, если $i > 2N$.

После решения системы (13) и нахождения зарядов q_i приближенные значения поля смещений в объеме деформированного тела вычисляются с помощью формул

$$\begin{gathered}
U_x(r) \approx \sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i^{1x}(r) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i\,\varphi_i^{2x}(r) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i\,\varphi_i^{3x}(r)\,,\\
U_y(r) \approx \sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i^{1y}(r) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i\,\varphi_i^{2y}(r) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i\,\varphi_i^{3y}(r)\,,\\
U_z(r) \approx \sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i^{1z}(r) + \sum_{i=N+1}^{2N} q_i\,\varphi_i^{2z}(r) + \sum_{i=2N+1}^{3N} q_i \varphi_i^{3z}(r)\,.
\end{gathered} \qquad (14)$$

Затем, используя соответствующие аналитические выражения, можно вычислить компоненты тензора деформаций. При этом, как отмечалось выше, дополнительная численная ошибка не возникает.

Аналогичным образом решается вторая граничная задача теории упругости, или смешанная граничная задача, когда на одной части границы заданы смещения, а на другой — напряжения. В этом случае вид системы МТИ (13) изменяется.

Решение стандартной задачи МТИ для полей упругих деформаций. Важнейшей характеристикой численных методов (в том числе и МТИ) является погрешность полученного с их помощью решения. При этом погрешность зависит от параметров задачи — например, от конфигурации области решения, от числа зарядов, моделирующих поле, от их расположения вокруг области решения и т. д. В общем случае получить такие зависимости весьма затруднительно. По-

этому исследование зависимости погрешности от параметров численной модели начнем с простейших случаев МТИ с последующим усложнением задачи.

В ряде публикаций производится оценка погрешности МТИ при решении двумерной задачи Дирихле для круговой области [8–13]. В трехмерном случае удобно использовать шарообразную область решения. Назовем задачу Дирихле для шаровой области стандартной трехмерной задачей МТИ. Приведем здесь результаты анализа численного решения этой задачи.

Так как для любого поля упругих деформаций, ввиду линейности уравнений (7), справедлив принцип суперпозиции, то его можно представить в виде наложения полей точечных источников. Поэтому при исследовании погрешности МТИ важнейшее значение имеет задача нахождения поля, созданного одним точечным зарядом, и оценка погрешности для этого поля.

Пусть искомое поле есть поле смещения, созданное единичным положительным зарядом первого типа, помещенным в точку с радиус-вектором ρ и Декартовыми координатами (ρ, 0, 0). Тогда в соответствии с (9–11) искомое поле будет описываться соотношениями

$$u_x(r)=n\frac{(x-\rho)^2}{|r-\rho|^3}+\frac{m}{|r-\rho|},\ u_y(r)=n\frac{(x-\rho)y}{|r-\rho|^3},\ u_z(r)=n\frac{(x-\rho)z}{|r-\rho|^3}\ . \tag{15}$$

Область решения представляет собой шар радиусом $r_0 = 2$. Заряды, моделирующие искомое поле, равномерно располагаются на вспомогательной сфере радиусом R. Количество зарядов каждого типа полагается равным N. Полное число зарядов $N_q = 3N$. Аналогично на границе области решения S, т. е. на сфере радиусом r_0, равномерно располагаются узловые точки, точки коллокации. Полное число зарядов и точек коллокации может не совпадать [8]. Тогда систему МТИ получают методом наименьших квадратов. Однако здесь применяется наиболее часто используемый и проверенный вариант МТИ, когда каждому заряду на вспомогательной сфере соответствует заряд на границе S. При этом допускается совпадение положения зарядов первого, второго и третьего типов и соответствующих им точек коллокации.

Погрешность МТИ в каждой точке области решения граничной задачи определяется величиной

$$\varepsilon(r)=max\left(\left|\varepsilon_x(r)\right|,\left|\varepsilon_y(r)\right|,\left|\varepsilon_z(r)\right|\right),$$

где $\varepsilon_x(r)=U_x(r)-u_x(r)$, $\varepsilon_y(r)=U_y(r)-u_y(r)$, $\varepsilon_z(r)=U_z(r)-u_z(r)$.

Так как функции $U_x(r), u_x(r), U_y(r), u_y(r), U_z(r), u_z(r)$ удовлетворяют однородным эллиптическим уравнениям (7), то и функции $\varepsilon_x(r), \varepsilon_y(r), \varepsilon_z(r)$ также удовлетворяют этим уравнениям, а, следовательно, своего максимального и минимального значения достигают на границе S. Поэтому в качестве относительной погрешности МТИ может использоваться величина

$$e=\frac{\varepsilon_{max}}{u_{max}}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_{max}=\varepsilon(r)|_S$, $u_{max}=\max\limits_{r\in S}\left(\left|u_x(r)\right|,\left|u_y(r)\right|,\left|u_z(r)\right|\right)$.

На рис. 1 приведены графики зависимости относительной погрешности МТИ e от количества зарядов первого типа N (равного количеству зарядов второго и третьего типов). При расчетах полагалось, что искомое поле — это поле точечного заряда первого типа, расположенного на оси x, удаленной от центра области V на расстояние $\rho = 2r_0$.

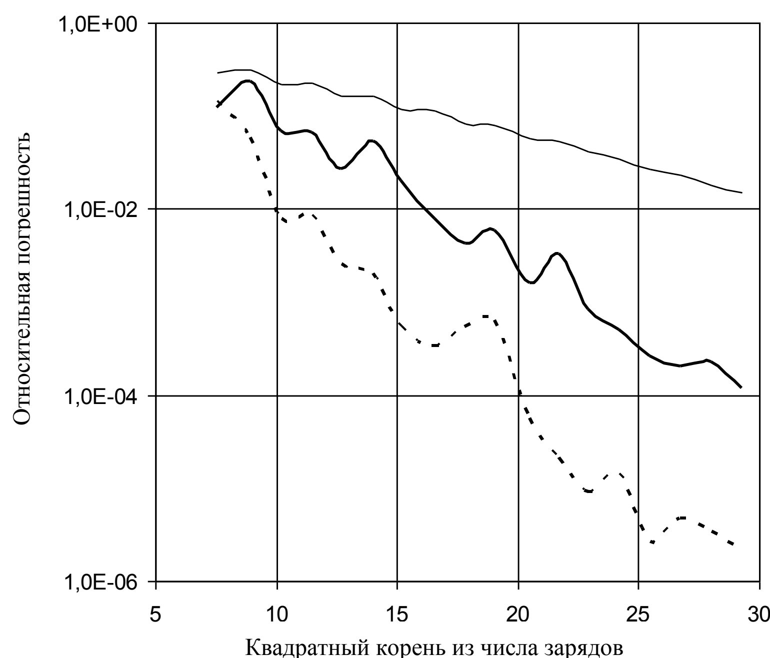


Рис. 1. Зависимость погрешности МТИ от количества зарядов, моделирующих искомое поле для разных значений R

Тонкая сплошная линия рассчитана при радиусе вспомогательной окружности $R = 1{,}1r_0$. На рис. 1 представлены также зависимости, рассчитанные при $R = 1{,}3r_0$ (жирная сплошная линия) и при $R = 1{,}7r_0$ (пунктирная линия). При расчетах использовались следующие значения постоянных Ламе: $\lambda = 0{,}5$; $\mu = 0{,}25$.

Из рис. 1 видна экспоненциальная зависимость погрешности МТИ от квадратного корня из числа моделирующих зарядов. Это качественно согласуется с полученной теоретически оценкой погрешности МТИ при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа (6).

Наблюдается не только качественное, но и некоторое количественное соответствие погрешности данных, представленных на рис. 1, с формулой (6). Действительно, запишем зависимость (6) приближенно в виде формулы $\varepsilon \approx EN\left(\frac{r_0}{R}\right)^{1{,}12\sqrt{N}}$. С другой стороны, зависимость погрешности от числа зарядов, соответствующая значению $R = 1{,}1r_0$ (тонкая сплошная линия на рис. 1), аппроксимируется формулой $\varepsilon = 0{,}32N\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2{,}72\sqrt{N}}$. Для значений $R = 1{,}3r_0$ (жирная сплошная линия) и $R = 1{,}7r_0$ (пунктирная линия) эти зависимости аппроксимируются формулами $\varepsilon = 0{,}100N\left(\frac{r_0}{R}\right)^{1{,}79\sqrt{N}}$ и, соответственно, $\varepsilon = 0{,}077N\left(\frac{r_0}{R}\right)^{0{,}86\sqrt{N}}$.

Как видно, различия между теоретической зависимостью (6) и аппроксимирующими зависимостями, полученными из результатов численных экспериментов, незначительны.

При решении задач теории упругости необходимо учитывать, что одним из основных параметров, определяющих точность численного решения, является удаленность зарядов, моделирующих искомое поле, от границы области решения. В данном случае при решении стандартной задачи МТИ этим параметром является R.

На рис. 2 приведены графики зависимости относительной погрешности МТИ e от относительной удаленности зарядов, моделирующих поле, равной $\Delta R = 10\ (R - r_0)/r_0$.

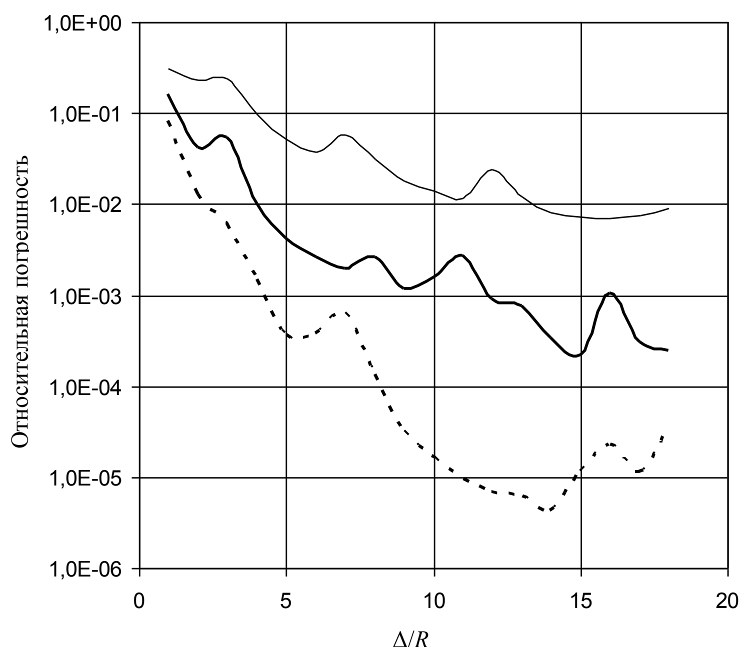


Рис. 2. Зависимость погрешности МТИ от удаленности моделирующих зарядов от границы области решения ΔR

Зависимости, представленные на рис. 2, получены при $\rho = 2r_0$ и трех различны значениях N: $N = 80$ (тонкая сплошная линия), $N = 196$ (жирная сплошная линия) и $N = 362$ (пунктирная линия).

Из рис. 2 видно, что при малых значениях удаленности моделирующих зарядов ΔR погрешность МТИ убывает с увеличением ΔR, причем это убывание происходит тем быстрее, чем больше число моделирующих зарядов. Это хорошо согласуется с оценкой (6). При относительно больших значениях ΔR наблюдается замедление убывания погрешности решения с увеличением удаленности моделирующих зарядов. Отмечается даже тенденция к росту погрешности МТИ при больших значениях ΔR. Это особенно заметно по пунктирной кривой на рис. 2, полученной при $N = 362$. Такое поведение погрешности МТИ, возможно, объясняется сильной зависимостью числа обусловленности матрицы системы МТИ от числа моделирующих зарядов. При относительно больших значениях ΔR число обусловленности системы МТИ резко возрастает, что может приводить к значительному увеличению погрешности округления численного решения.

Для МТИ характерно экспоненциально быстрое возрастание числа обусловленности системы МТИ с ростом размерности системы, т. е. с увеличением числа моделирующих зарядов N [7]. Эту особенность МТИ при решении задач теории упругости иллюстрирует рис. 3. Графики на рис. 3 построены при тех же параметрах МТИ, что и графики на рис. 1 — т. е. при $\rho = 2r_0$, $R = 1{,}1r_0$ (тонкая сплошная линия), $R = 1{,}3r_0$ (жирная сплошная линия) и при $R = 1{,}7r_0$ (пунктирная линия).

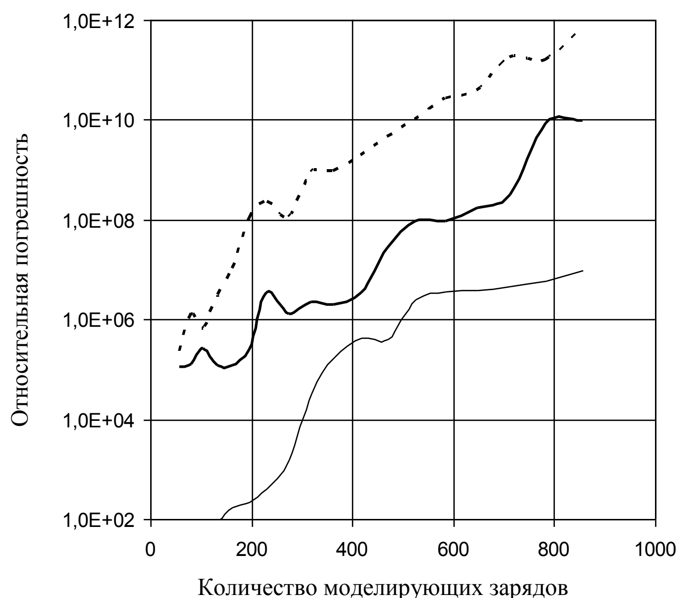


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности системы МТИ от количества зарядов, моделирующих искомое поле

Из рис. 3 видно, что число обусловленности системы МТИ C может изменяться в весьма широком интервале — от нескольких единиц до 10^{12} и более. Так как отдельные вычислительные операции не могут быть выполнены на компьютере абсолютно точно, а производятся с относительной погрешностью ε, то при решении системы МТИ возникает относительная погрешность округления $e \le C\varepsilon$. Погрешность ε, обусловленная ограниченностью представления вещественных чисел на компьютере, при использовании чисел типа *double* имеет значение порядка 10^{-14}. Это предельная точность вычислений на обычных компьютерах. В некоторых случаях, например при моделировании двумерных полей упругих деформаций с помощью МТИ, такая предельно высокая точность вычислений может быть достигнута [15], что вполне типично. Высокая точность вычислений достигается, несмотря на большие значения чисел обусловленности ($C > 10^{10}$ для $R = 1{,}7r_0$). Более того, весьма часто точность результата бывает тем выше, чем больше число обусловленности [21–23]. В ряде публикаций исследуются причины такой особенности [22]. Тем не менее, большие значения чисел обусловленности системы МТИ чаще приводят к существенному снижению точности результата. Именно этим в значительной степени объясняются некоторая немонотонность и колебания представленных на рис. 1–3 зависимостей.

Пример решения тестовой задачи. В качестве примера рассмотрим решение тестовой задачи [5]. Область решения является шаром единичного радиуса. Граничные значения на сфере имеют вид

$$f_x = 2 + 3\cos 2\theta\,,\ f_y = 2 + 3\cos 2\theta\,,\ f_z = -1 + 3\cos 2\theta\,,$$

где θ — полярный угол.

Точное решение этой задачи при $\dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu} = 0{,}25$ имеет вид

$$U_x(x,y,z) = 5z^2 - x^2 - y^2\,,\ U_y(x,y,z) = 5z^2 - x^2 - y^2\,,\ U_z(x,y,z) = 2z^2 - 4\left(x^2 + y^2\right)^2.$$

На рис. 4 представлены зависимости погрешности решения этой задачи от квадратного корня из числа моделирующих зарядов, полученные при $R = 1{,}1r_0$ (тонкая сплошная линия на рис. 4), $R = 1{,}3r_0$ (жирная сплошная линия) и $R = 1{,}7r_0$ (пунктирная линия).

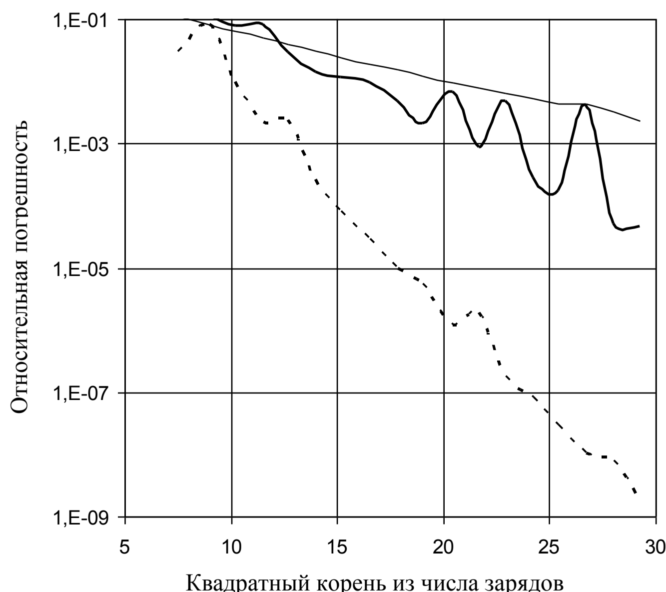


Рис. 4. Зависимость погрешности решения тестовой задачи от количества зарядов, моделирующих искомое поле, для разных значений R

Как видно из рис. 4, полученные результаты весьма близки к зависимостям, представленным на рис. 1. Этого следовало ожидать, так как, в соответствии с изложенным выше, поле практически любой задачи теории упругости можно с необходимой точностью представить в виде суперпозиции полей точечных зарядов.

Заключение. Проведенные исследования показали принципиальную возможность использования МТИ при моделировании полей упругих деформаций в твердом теле даже при решении трехмерных задач. Исследована зависимость погрешности от параметров системы при решении стандартной задачи МТИ для шаровой области. Полученные результаты, как показали дополнительные численные эксперименты, оказались в качественном и (частично) количественном соответствии с результатами теоретических исследований свойств решения задачи Дирихле.

При практической реализации МТИ следует подобрать наиболее эффективное значение удаленности ΔR моделирующих зарядов от границы области решения. Здесь необходимо учитывать, что, чем ближе моделирующие заряды к границе, тем выше погрешность МТИ, но зато меньше число обусловленности системы МТИ и, соответствен-

но, устойчивее решение. Напротив, с удалением моделирующих зарядов от границы области решения точность МТИ повышается, но одновременно увеличивается значение числа обусловленности, что может привести к повышению результирующей погрешности и даже к неустойчивости решения. Наиболее эффективное значение удаленности ΔR можно подобрать в ходе численного эксперимента. Для трехмерного случая это значение близко к $\Delta R = 0{,}7r_0$.

Библиографический список

1. Победря, Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. — 2-е изд. — Москва : Изд-во МГУ, 1995. — 366 с.

2. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — Москва : Мир, 1986. — 318 с.

3. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел. — Москва : Мир, 1987. — 524 с.

4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1989. — 616 с.

5. Алексидзе, М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. — Москва : Наука, 1991. — 352 с.

6. Бахвалов, Ю. А**.** Математическое моделирование физических полей методом точечных источников / Ю. А. Бахвалов, С. Ю. Князев, А. А. Щербаков // Изв. РАН. Сер. физическая. — 2008. — Т. 72, № 9. — С. 1259—1261.

7. Князев, С. Ю. Устойчивость и сходимость метода точечных источников поля при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа / С. Ю. Князев // Изв. вузов. Электромеханика. — 2010. — № 3. — С. 3–12.

8. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Advances in Computational Mathematics. — 1998. — Vol. 9. — P. 69–95.

9. Golberg, M. A. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems / M. A. Golberg, C. S. Chen // Boundary Integral Methods — numerical and mathematical aspects. — Southampton : Computational Mechanics Publication. — 1998. — P. 103–176.

10. Bogomolny, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems / A. Bogomolny // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1985. — Vol. 22, № 4. — P. 644–669.

11. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for problems in potential theory / G. Fairweather, R. - L. Johnston // Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. — London : Academic Press, 1982. — P. 349–359.

12. Katsurada, M. The collocation points of the method of fundamental solutions for the potential problem / M. Katsurada, H. Okamoto // Computers & Mathematics with Applications. — 1996. — Vol. 31. — P. 123–137.

13. Князев, С. Ю. Решение граничных задач математической физики методом точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Изв. вузов. Электромеханика. — 2007. — № 3. — С. 11–15.

14. Князев, С. Ю. Решение задач тепло- и массопереноса с помощью метода точечных источников поля / С. Ю. Князев, Е. Е. Щербакова // Изв. вузов. Электромеханика. — 2006. — № 4. — С. 43–47.

15. Князев, С. Ю. Моделирование полей упругих деформаций с применением метода точечных источников / С. Ю. Князев, В. Н. Пустовойт, Е. Е. Щербакова // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2015. — Т. 15. — № 1 (80). — С. 29–38.

16. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1987. — 248 с.

17. Patterson, C. On the use of fundamental solutions in Trefftz method for potential and elasticity problems / C. Patterson, M. A. Sheikh // Boundary Element Methods in Engineering. — Berlin : Springer, 1982. — P. 973–980.

18. Redekop, D. Fundamental solutions for the collocation method in three-dimensional elastostatics / D. Redekop, R.-S.-W. Cheung // Computers & Structures. — 1987. — Vol. 26. — P. 703–707.

19. Yan Gu. Improved singular boundary method for elasticity problems / Yan Gu, Wen Chen, Xiaoqiao He // Computers & Structures. — 2014. — Vol. 135. — P. 7–82.

20. Marin, L. The MFS–MPS for two-dimensional steady-state thermoelasticity problems / L. Marin, A. Karageorghis // Engineering Analysis with Boundary Elements Journal Impact Factor & Information. — 2013. — Vol. 37, iss. 7–8. — P. 1004–1020.

21. Christiansen, S. Condition number of matrices derived from two classes of integral equations / S. Christiansen // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 1981. — Vol. 3. — P. 364–392.

22. Drombosky, T. W. Applicability of the method of fundamental solutions / T. W. Drombosky, A. L. Meyer, L. Ling // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2009. — Vol. 33. — P. 637–643.

23. Smyrlis, Y.-S. Some aspects of the method of fundamental solutions for certain harmonic problems / Y.-S. Smyrlis, A. Karageorghis // Journal of Scientific Computing. — 2001. — Vol. 16 (3). — P. 341–371.

References

1. Pobedrya, B.E. Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. [Numerical methods in the elasticity and plasticity theory.] 2nd ed. Moscow: Izd-vo MGU, 1995, 366 p. (in Russian).

2. Zenkevich, O., Morgan, K. Konechnye elementy i approksimatsiya. [Finite Elements and Approximation.] Moscow: Mir, 1986, 318 p. (in Russian).

3. Brebbia, C., Telles, J., Wrobel, L. Metody granichnykh elementov. [Boundary Element Techniques.] Moscow: Mir, 1987, 524 p. (in Russian).

4. Samarskiy, A.A. Teoriya raznostnykh skhem. [Difference scheme theory.] Moscow: Nauka, 1989, 616 p. (in Russian).

5. Aleksidze, M.A. Fundamental'nye funktsii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach. [Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems.] Moscow: Nauka, 1991, 352 p. (in Russian).

6. Bakhvalov, Yu.A., Knyazev, S.Yu., Shcherbakov, A.A. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh poley metodom tochechnykh istochnikov. [Mathematical Modeling of Physical Fields by the Point-Source Method.] Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2008, vol. 72, no. 9, pp. 1259—1261 (in Russian).

7. Knyazev, S.Yu. Ustoychivost' i skhodimost' metoda tochechnykh istochnikov polya pri chislennom reshenii kraevykh zadach dlya uravneniya Laplasa. [Stability and convergence of the field point-source method in the numerical solution to boundary value problems for the Laplace equation.] Izvestia. Electromechanics. 2010, no. 3, pp. 3–12 (in Russian).

8. Fairweather, G., Karageorghis, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. Advances in Computational Mathematics, 1998, vol. 9, pp. 69–95.

9. Golberg, M.A., Chen, C.S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. Boundary Integral Methods — numerical and mathematical aspects. Southampton: Computational Mechanics Publication, 1998, pp. 103–176.

10. Bogomolny, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1985, vol. 22, no. 4, pp. 644–669.

11. Fairweather, G., Johnston, R.-L. The method of fundamental solutions for problems in potential theory. Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. London: Academic Press, 1982, pp. 349–359.

12. Katsurada, M., Okamoto, H. The collocation points of the method of fundamental solutions for the potential problem. Computers & Mathematics with Applications, 1996, vol. 31, pp. 123–137.

13. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Reshenie granichnykh zadach matematicheskoy fiziki metodom tochechnykh istochnikov polya. [Solution of boundary value problems of mathematical physics by the field Point-Source method.] Izvestia. Electromechanics. 2007, no. 3, pp. 11–15 (in Russian).

14. Knyazev, S.Yu., Shcherbakova, E.E. Reshenie zadach teplo- i massoperenosa s pomoshch'yu metoda tochechnykh istochnikov polya. [Solution to the problems of heat and mass transfer by the field point-source method.] Izvestia. Electromechanics. 2006, no. 4, pp. 43–47 (in Russian).

15. Knyazev, S.Yu., Pustovoyt, V.N., Shcherbakova, E.E. Modelirovanie poley uprugikh deformatsiy s primeneniem metoda tochechnykh istochnikov. [Modeling the elastic strain fields by point-source method.] Vestnik of DSTU, 2015, vol. 15, no. 1 (80), pp. 29–38 (in Russian).

16. Landau, L.D., Lifshits, E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. VII. Teoriya uprugosti. [Theoretical Physics. In 10 vol. Vol. VII. Elasticity theory.] Moscow: Nauka, 1987, 248 p. (in Russian).

17. Patterson, C., Sheikh, M.A. On the use of fundamental solutions in Trefftz method for potential and elasticity problems. Boundary Element Methods in Engineering. Berlin: Springer, 1982, pp. 973–980.

18. Redekop, D., Cheung, R.-S.-W. Fundamental solutions for the collocation method in three-dimensional elastostatics. Computers & Structures, 1987, vol. 26, pp. 703–707.

19. Yan Gu, Wen Chen, Xiaoqiao He. Improved singular boundary method for elasticity problems. Computers & Structures, 2014, vol. 135, pp. 7–82.

20. Marin, L., Karageorghis, A. The MFS–MPS for two-dimensional steady-state thermoelasticity problems. Engineering Analysis with Boundary Elements Journal Impact Factor & Information, 2013, vol. 37, iss. 7–8, pp. 1004–1020.

21. Christiansen, S. Condition number of matrices derived from two classes of integral equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1981, vol. 3, pp. 364–392.

22. Drombosky, T.W., Meyer, A.L., Ling, L. Applicability of the method of fundamental solutions. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, vol. 33, pp. 637–643.

23. Smyrlis, Y.-S., Karageorghis, A. Some aspects of the method of fundamental solutions for certain harmonic problems. Journal of Scientific Computing, 2001, vol. 16 (3), pp. 341–371.

Поступила в редакцию 26.05.2015

Сдана в редакцию 26.05.2015

Запланирована в номер 24.09.2015